. Теоретические основы для решения задач по планиметрии

Теорема Пифагора и прямоугольные треугольники.

В треугольнике ABC через a, b и c мы будем обозначать стороны BC, CA и AB соответственно, а противолежащие этим сторонам углы – через α, β и γ. Высоту, выходящую из точки A, обозначим h_a, медиану m_a, а биссектрису – l_a. Кроме того, через R обозначается радиус описанной около

треугольника, а через r – радиус вписанной в треугольник окружности. Площадь треугольника обозначается буквой S, а полупериметр – буквой p. Приведем некоторые теоремы и формулы (будем считать, что c – гипотенуза треугольника).

Теорема 1. (Теорема Пифагора) В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 1).

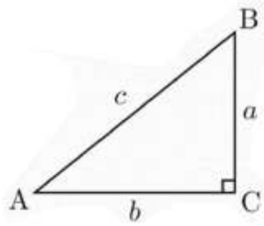

Рис. 1. Теорема 1

Теорема 2. В прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

$a = c\cos\beta = c\sin\alpha = b\tan\alpha = b\cot\beta,\ c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ (рис. 2).

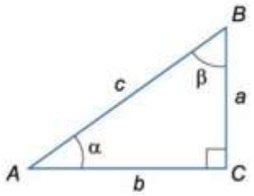

Рис. 2. Теорема 2

Теорема 3. Если в прямоугольном треугольнике через c_a и c_b обозначить проекции катетов на гипотенузу, то справедливы следующие соотношения:

$h^2 = c_a \cdot c_b,\ a^2 = c \cdot c_a,\ b^2 = c \cdot c_b$ (рис. 3).

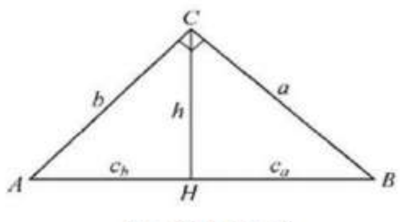

Рис. 3. Теорема 3

Теорема 4. Площадь прямоугольного треугольника равна

$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$

Теорема 5. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы. Отсюда следует, что медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы (рис. 4).

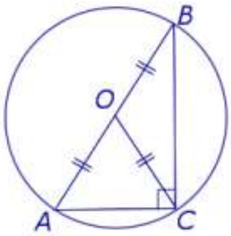

Рис. 4. Теорема 5

Теорема 6. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру т.е.

$r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}$, так как $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = 2ab$.

Теоремы синусов и косинусов. Площадь треугольника.

Теорема 7. (Теорема косинусов) В произвольном треугольнике справедливо соотношение $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Теорема 8. (Теорема синусов) В произвольном треугольнике справедливы соотношения $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Теорема 9. Площадь произвольного треугольника можно вычислить по одной из следующих формул:

$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Последняя называется формулой Герона.

Биссектриса и медиана треугольника.

Теорема 10. (Формула для вычисления длины биссектрисы) В произвольном треугольнике справедливо соотношение $l_a = \frac{bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

Теорема 11. (Формула для вычисления длины биссектрисы) В произвольном треугольнике справедливо соотношение $l_b^2 = ac - mn$, где m, n – отрезки, на которые биссектриса l_b делит сторону b (рис. 5).

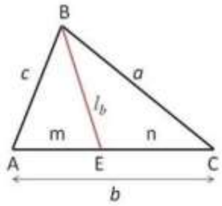

Рис. 5. Теорема 11

Теорема 12. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на отрезки, длины которых относятся как 2 : 1, считая от вершины

Теорема 13. (Формула для вычисления длины медианы) В произвольном треугольнике справедливо соотношение $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (рис. 6).

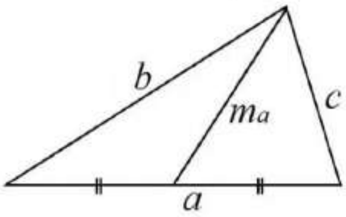

Рис. 6. Теорема 13

Теорема 14. (Теорема о биссектрисе внутреннего угла) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника

Теорема 15. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в этот треугольник окружности (рис. 7).

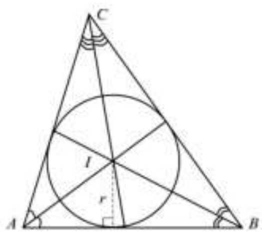

Рис. 7. Теорема 15

Пропорциональные отрезки и подобие треугольников.

Теорема 16. (Теорема Фалеса) Параллельные прямые высекают на пересекающих их прямых пропорциональные отрезки (рис. 8).

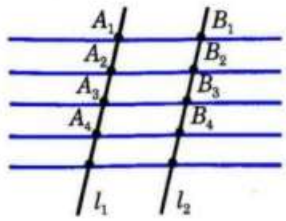

Рис. 8. Теорема 16

Два треугольника называют подобными, если соответствующие стороны у них пропорциональны. Заметим, что у подобных треугольников пропорциональны также все соответствующие элементы (высоты, медианы, биссектрисы, радиусы вписанной и описанной окружностей и т.д.).

Теорема 17. (Первый признак подобия) Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то такие треугольники подобны

Теорема 18. (Второй признак подобия) Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Теорема 19. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Теорема 20. (Теорема Менелая) Если некоторая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC – в точке Z, то $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$ (рис. 8) .

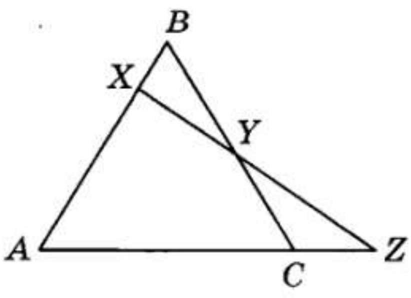

Рис. 8. Теорема 20

Теорема 21. Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольники A_1BC_1 и ABC подобны, причем коэффициент подобия $k = \cos B$.

Леммы о площадях.

Лемма 1. Если стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и A_1BC_1 лежат на одной прямой, то площади этих треугольников относятся как длины их оснований, а именно (рис. 9): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

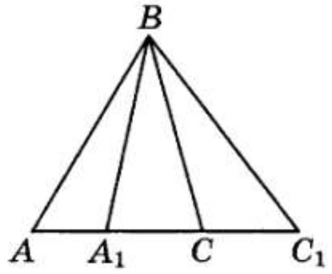

Рис. 9. Лемма 1

Лемма 2. Если два треугольника ABC и A_1BC_1 имеют общую сторону AC, то их площади относятся как длины отрезков BD и B_1D, где D – точка пересечения прямой BB_1 с прямой AC, а именно (рис. 10): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB_1C}} = \frac{BD}{B_1D}$.

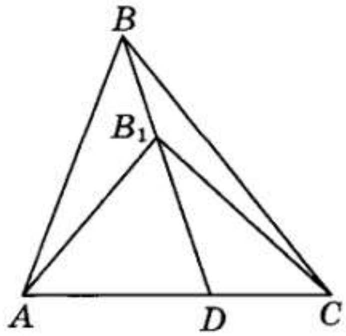

Рис. 10. Лемма 2

Лемма 3. Если треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A, то их площади относятся как произведения соответствующих сторон, прилежащих к этому углу, а именно (рис. 11): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}$.

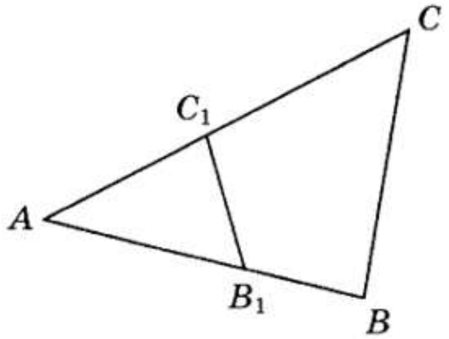

Рис. 11. Лемма 3

Теорема 22. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Значит, вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, или на равные дуги одной окружности, равны (рис. 12).

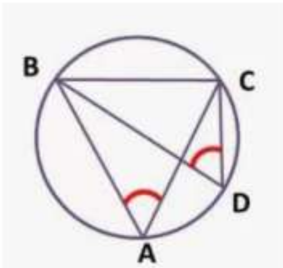

Рис. 12. Теорема 22

Теорема 23. Угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла.

Теорема 24. Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла.

Теорема 25. Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой угловых величин дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения.

Теорема 26. Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна π, и наоборот, если сумма противоположных углов выпуклого четырехугольника равна π, то вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

Теорема 27. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

Теорема 28. Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для любой секущей, проведенной к окружности из данной точки, и равна квадрату длины касательной, проведенной к окружности из той же точки.

Касание окружностей. Касание прямой и окружности.

Теорема 29. Если две окружности касаются внешним образом, то центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, а расстояние между центрами равно сумме радиусов этих окружностей (рис. 13).

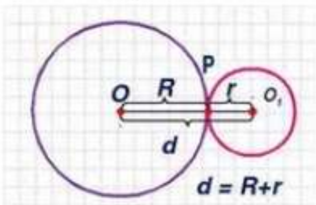

Рис. 13. Теорема 29

Теорема 30. Если две окружности касаются внутренним образом, то центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, а расстояние между центрами равно модулю разности радиусов этих окружностей (рис. 14).

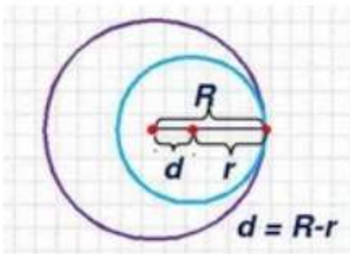

Рис. 14. Теорема 30

Теорема 31. Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой (рис. 15).

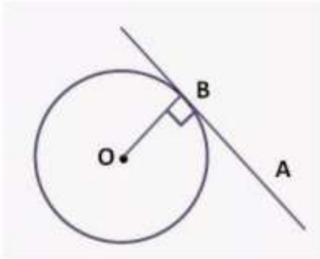

Рис. 15. Теорема 31

Теорема 32. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равный углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности (рис. 16).

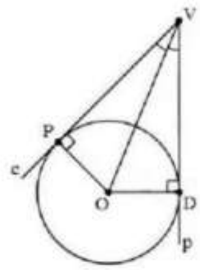

Рис. 16. Теорема 32

Теорема 33. В любом описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

Теорема 34. В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, есть разность полупериметра треугольника и стороны, противолежащей данной вершине.

Теорема 35. В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности (касающейся противоположной данной вершине стороны треугольника и продолжений двух других его сторон) с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, есть полупериметр треугольника.

Длины и площади, связанные с окружностью.

Сектором называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, а сегментом – часть круга, ограниченная некоторой прямой и дугой окружности. Угловой величиной сектора или сегмента называется угловая величина дуги, ограничивающая этот сектор (сегмент). Все углы измеряются в радианах

Теорема 36. Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Теорема 37. Длина дуги угловой величины α окружности радиуса R равна αR.

Теорема 38. Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Теорема 39. Площадь сектора угловой величины α круга радиуса R равна $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

Теорема 40. Площадь сегмента угловой величины α круга радиуса R равна $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Четырехугольники.

Теорема 41. Площадь трапеции равна произведению полусумме длин оснований на высоту (рис. 17).

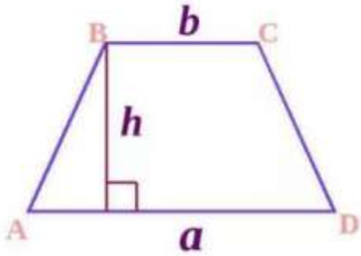

Рис. 17. Теорема 41

Теорема 42. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, опущенную на данное основание, или произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними (рис. 18).

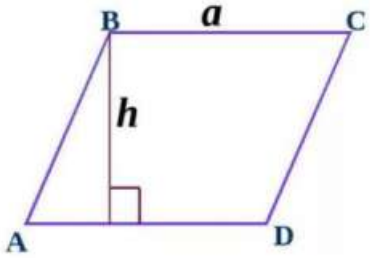

Рис. 18. Теорема 42

Теорема 43. В параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

Теорема 44. Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Теорема 45. Площадь четырехугольника, описанного около окружности, равна произведению полупериметра этого четырехугольника на радиус данной окружности.

Теорема 46. Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника .

Теорема 47. Если у выпуклого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон этого четырехугольника равны.