Методика решения геометрических задач ЕГЭ (профильный уровень)

Учитель математики МБОУ СОШ №4

имени А.С.Пушкина муниципального образования

Каневской район Краснодарского края

Михайленко Любовь Александровна

Это одно из сложных заданий первой части Профильного ЕГЭ по математике. Рассчитывать на везение здесь не придётся. Задание содержит много различных типов задач, в том числе непростых. Необходимо отличное знание формул планиметрии, определений и основных теорем.

Советы для учащихся

Необходимое условие для решения этой задачи — хорошее владение теоретическим материалом, например, из классического учебника по геометрии для 7-9 классов (Л.С. Атанасян). Необходимо знать формулировки аксиом и определений, уметь формулировать и доказывать теоремы, признаки, свойства и формулы. Изучите дополнительные методы: метод дополнительного построения, метод подобия, метод замены, метод введения вспомогательного неизвестного, метод удвоения медианы, метод вспомогательной окружности, метод площадей.

Также здесь важен чертёж. 80% успеха геометрической задачи — это правильно сделанный чертёж. Сделайте большой, хороший, наглядный рисунок, не экономьте на нем место.

И последнее, лайфхак учащимся — для решения задач по планиметрии выучите пять формул площади треугольника: через высоту и основание, через две стороны и угол между ними, через радиус вписанной окружности, через радиус описанной окружности и формулу Герона.

Площадь треугольника через высоту и основание	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
Площадь треугольника через две стороны и угол между ними	$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$
Площадь треугольника через радиус вписанной окружности	$S = p \cdot r$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, r - радиус вписанной окружности
Площадь треугольника через радиус описанной окружности	$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где R - радиус описанной окружности
Формула Герона	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$

Многие задания под №6 являются схемами для решения более сложных геометрических задач, например задания под № 16.

Рассмотрим основные типы заданий №6 Профильного ЕГЭ по математике.

- Тригонометрия в прямоугольном треугольнике
- Треугольники. Формулы площади треугольника.
- Элементы треугольника: высоты, медианы, биссектрисы
- Параллелограмм
- Прямоугольник
- Трапеция и ее свойства
- Центральные и вписанные углы
- Касательная, хорда, секущая
- Вписанные и описанные треугольники
- Вписанные и описанные четырехугольники

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

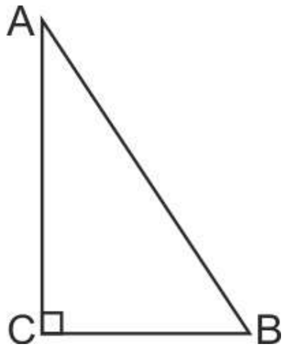
1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, BC = 15, $tgA = 0,75$. *Найдите AC.*

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Катет BC — противолежащий для угла A, катет AC— прилежащий. Получим:

$$AC = \frac{BC}{tgA} = \frac{15}{0,75} = 20$$

Ответ: 20.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $tgA = \frac{9}{40}$, $AC = 20$. *Найдите AB.*



По определению косинуса угла, $cos A = \frac{AC}{AB}, AB = \frac{AC}{\cos A}$.

Найдем косинус угла А с помощью формулы:

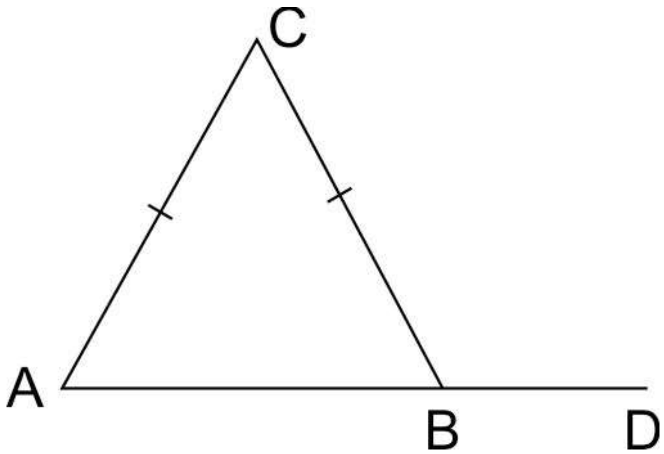
$tg^2\angle A + 1 = \frac{1}{cos^2\angle A}$

Отсюда

Ответ: 20,5

Треугольники. Формулы площади треугольника.

3. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 122°. *Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.*



По условию, угол DBC — внешний угол при вершине B — равен 122°. Тогда угол CBA равен $180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$. Угол CAB равен углу CBA и тоже равен 58°, поскольку треугольник ABC — равнобедренный. Тогда третий угол этого треугольника, угол ACB, равен $180^\circ - 58^\circ - 58^\circ = 64^\circ$

4. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $30°$. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

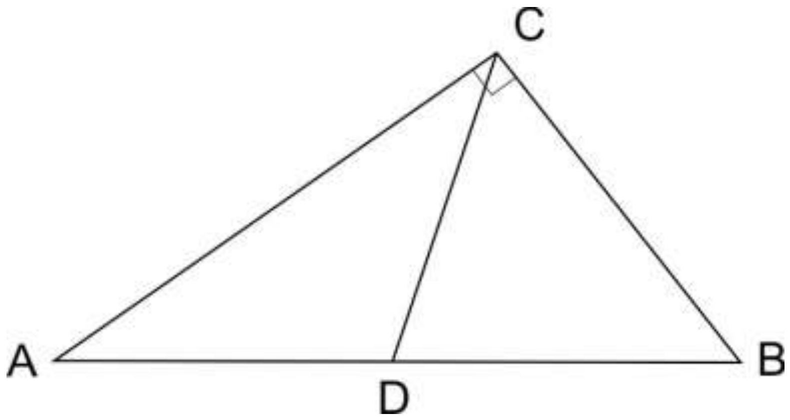
По формуле площади треугольника, $S\ \Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin\angle C$. Получим:

$S = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot sin30° = 25$ см2

Ответ: 25

Элементы треугольника: высоты, медианы, биссектрисы

5. В треугольнике ABC угол ACB равен $90°$, угол B равен $58°$, CD — медиана. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.



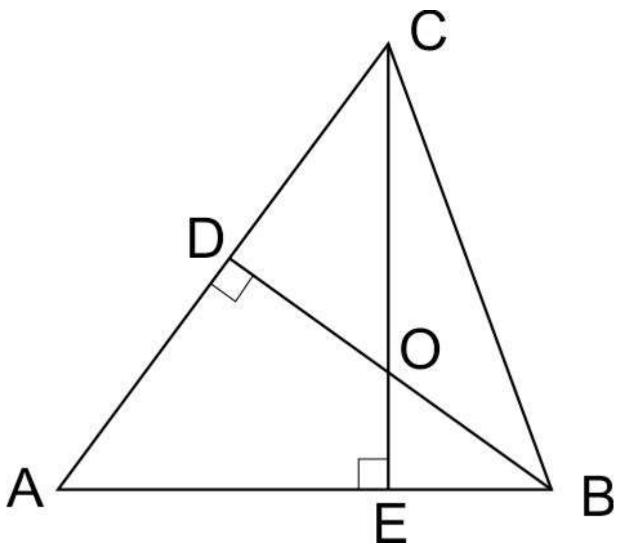
Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Это значит, что треугольник CBD — равнобедренный, CD=BD. Тогда

$\angle DCB = \angle DBC = 58°.$

Углы ACD и DCB в сумме дают $90°$. Отсюда

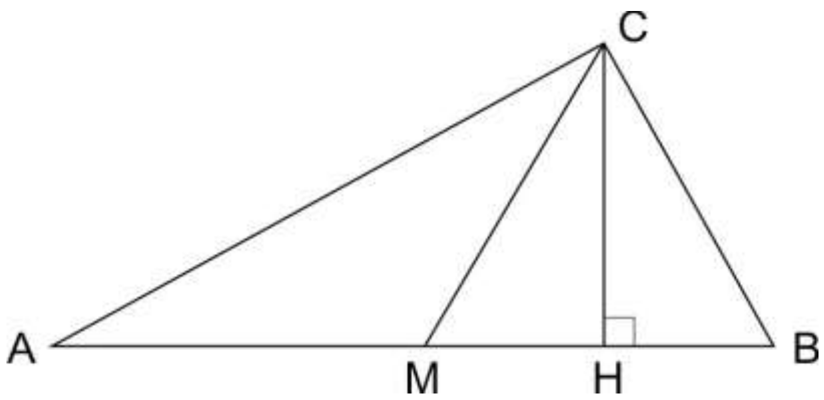
$\angle ACD = 90° - \angle DCB = 90° - 58° = 32°.$

6. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $65°$. BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



В треугольниках ACE и OCD угол C — общий, углы A и D равны 90°. Значит, треугольники ACE и OCD подобны, углы CAE и DOC равны, и $\angle DOC = 65^\circ$. Тогда угол DOE — смежный с углом DOC. Он равен $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

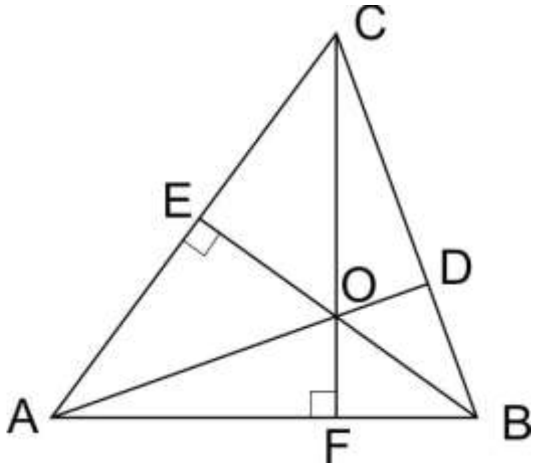
7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. *Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.*



Медиана CM в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то есть AM=CM. Значит, треугольник ACM — равнобедренный, углы CAM и ACM равны.

Тогда

8. В треугольнике ABC угол A равен 60° *угол B равен* 82°. *AD, BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.*

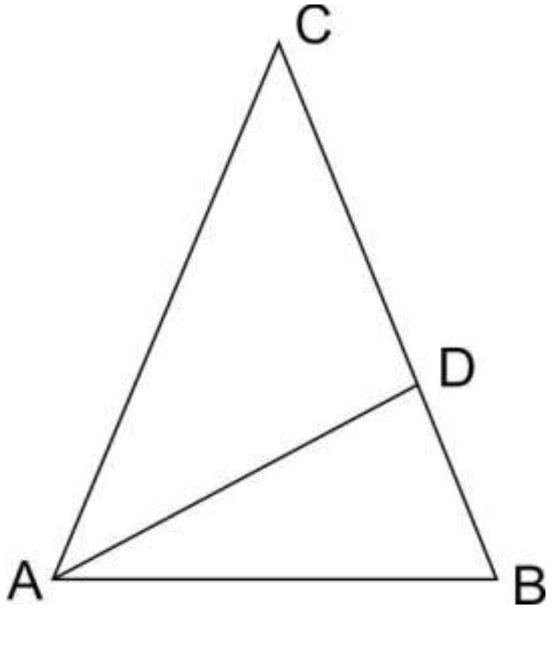


Найдем третий угол треугольника ABC — угол C. Он равен $180^\circ - 60^\circ - 82^\circ = 38^\circ$.

Заметим, что в треугольнике AOC острые углы равны половинкам углов CAB и ACB, то есть 30° и 19°.

Угол AOF — внешний угол треугольника AOC. Он равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, то есть 49°.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и AB=AD=CD. Найдите меньший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



По условию, треугольники ADC и ADB — равнобедренные.

Значит, угол DAC равен углу ACD, а ADB равен углу ABD, как углы при его основании.

Обозначим угол BAD за x.

Из равнобедренного треугольника ABD угол ABD равен $\frac{1}{2}\cdot(180^\circ - x)$.

С другой стороны, этот угол равен углу BAC, то есть $2x$.

Получим:

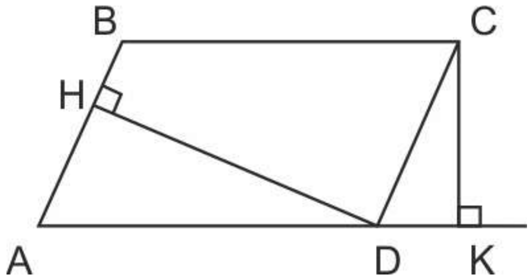
$2x = \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - x)$.
Отсюда $x = 36^\circ$.

Ответ: 36.

Параллелограмм

10. В параллелограмме ABCDAB=3, AD=21, $sinA = \frac{6}{7}\cdot$ *Найдите большую высоту параллелограмма.*

Большая высота параллелограмма проведена к его меньшей стороне.



Получим:

$DH = ADsinA = 21\cdot\frac{6}{7} = 3\cdot 6 = 18.$

Ответ: 18

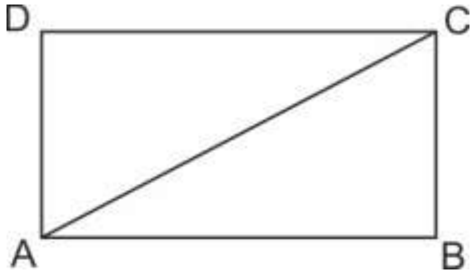
11. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание. Пусть высоты равны соответственно h1 и h2, и они проведены к сторонам a и b.

Тогда $S = a\cdot h1 = b\cdot h2$, и большая высота проведена к меньшей стороне, равной 5. Длина этой высоты равна $40 : 5 = 8$.

Прямоугольник

12. Периметр прямоугольника равен 8, а площадь равна 3,5. Найдите диагональ этого прямоугольника.



Обозначим длины сторон a и b. Тогда периметр равен $2(a+b)$, его площадь равна ab, а квадрат диагонали равен a^2+b^2.

Получим: $2(a+b)=8$, тогда $a+b=4$,

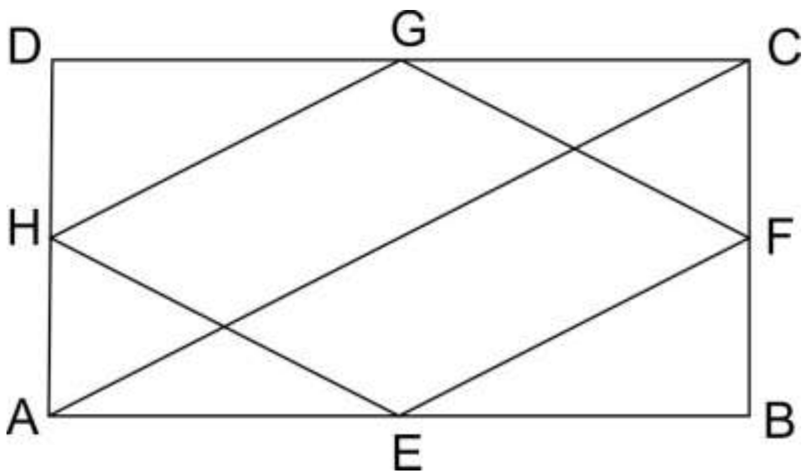
$ab=3,5.$

По формуле квадрата суммы, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Отсюда квадрат диагонали $a^2+b^2=(a+b)^2=2ab=4^2-2\cdot 3,5=16-7=9$, и длина диагонали $AC=3$.

Ответ: 3.

13. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника.

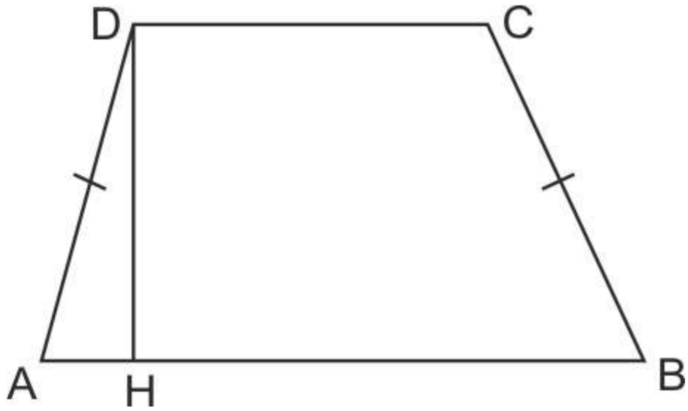


Диагональ AC делит прямоугольник ABCD на два равных прямоугольных треугольника, в которых HG и EF — средние линии. Средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна половине этого основания, значит, $HG = EF = \frac{5}{2}$.

Проведем вторую диагональ DB. Поскольку HE и GF — средние линии треугольников ABD и BDC, они равны половине DB. Диагонали прямоугольника равны, значит, HE и GF тоже равны $\frac{5}{2}$. Тогда HGFE — ромб, и его периметр равен $4 \cdot \frac{5}{2} = 10$.

Трапеция и ее свойства

14. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.



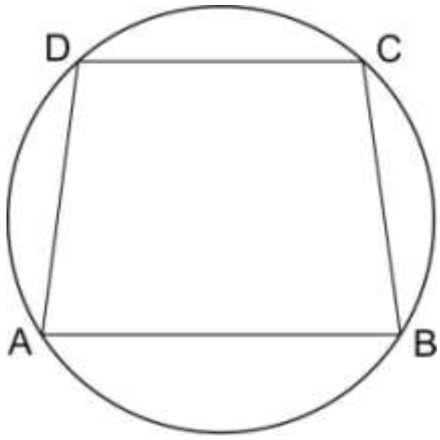
Отрезок AH равен полуразности оснований трапеции: $AH = \frac{AB-CD}{2} = \frac{26-14}{2} = 6.$

Из прямоугольного треугольника ADH найдем высоту трапеции $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 8.$

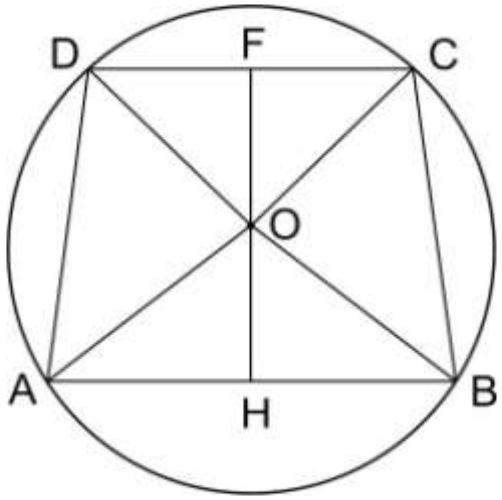
Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{(AB+CD) \cdot DH}{2} = 160.$$

15. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.

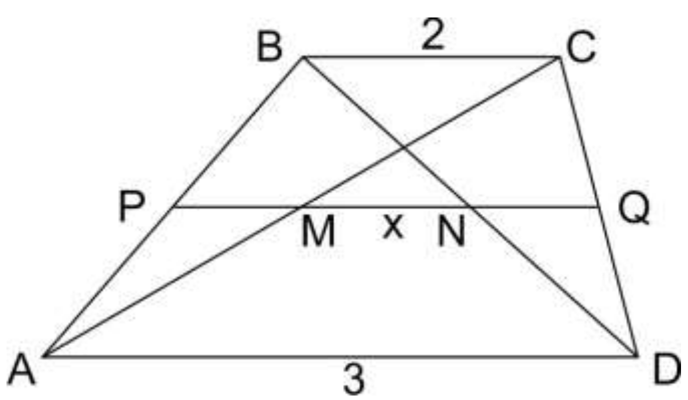


Отметим центр окружности и соединим его с точками A, B, C и D.



Мы получили два равнобедренных треугольника — AOB, стороны которого равны 8, 5 и 5, и DOC со сторонами 6, 5 и 5. Тогда OH и OF - высоты этих треугольников, являющиеся также их медианами. Из прямоугольных треугольников AOH и DOF получим, что OH = 3, OF = 4. Тогда FH - высота трапеции, FH = 7.

16. Основания трапеции равны 2 и 3. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Проведем PQ — среднюю линию трапеции,PQ = 2,5. Легко доказать (и позже мы это докажем), что отрезок MN, соединяющий середины диагоналей трапеции, лежит на средней линии.

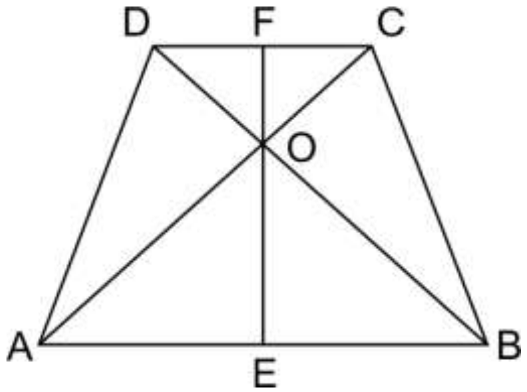
PM — средняя линия треугольника ABC, значит, PM = 1.

NQ — средняя линия треугольника BCD, значит, NQ = 1.

Тогда $MN = PQ - PM - NQ = 2,5 - 1 - 1 = 0,5$

Ответ: 0,5.

17. Диагонали равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 9. Найдите ее среднюю линию.



Треугольники AOE и FOC — прямоугольные и равнобедренные,

$OF = FC = \frac{1}{2}DC,$

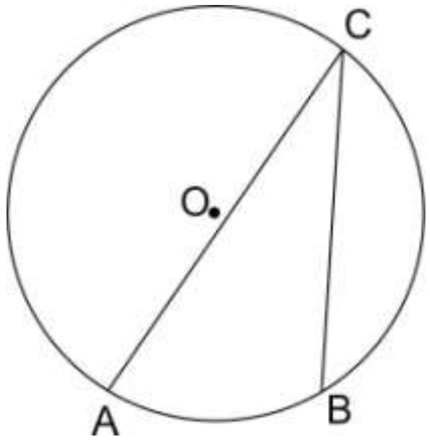
$OE = AE = \frac{1}{2}AB.$

Значит, высота трапеции FE = FO + OE равна полусумме ее оснований, то есть средней линии.

Ответ: 9.

Центральные и вписанные углы

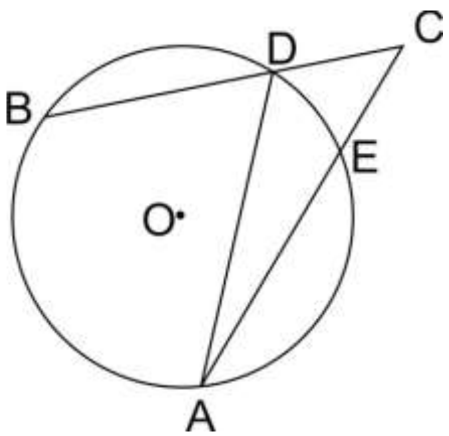
18. Дуга окружности AC, не содержащая точки B, имеет градусную меру 200°, а дуга окружности BC, не содержащая точки A, имеет градусную меру 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Полный круг — это $360°$. Из условия мы получим, что дуга ABC равна $360° - 200° = 160°$.Тогда дуга AB, на которую опирается вписанный угол ACB, равна $160° - 80° = 80°$. Вписанный угол ACB равен половине угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $40°$.

Ответ: 40

19. Угол ACB равен $3°$ *Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна* 120. *Найдите угол DAC. Ответ дайте в градусах.*



так как

величина дуги AB равна 120 .

Тогда угол ADB равен 60° - как вписанный, опирающийся на дугу AB.

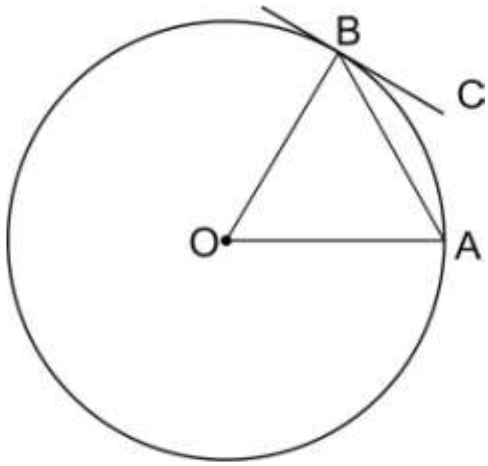
Угол ADB — внешний угол треугольника ACD. Величина внешнего угла треугольника равна сумме внутренних углов, не смежных с ним.

DAC=60° - $3°$=57°

Ответ: 57°

Касательная, хорда, секущая

20. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен $32°$. *Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.*

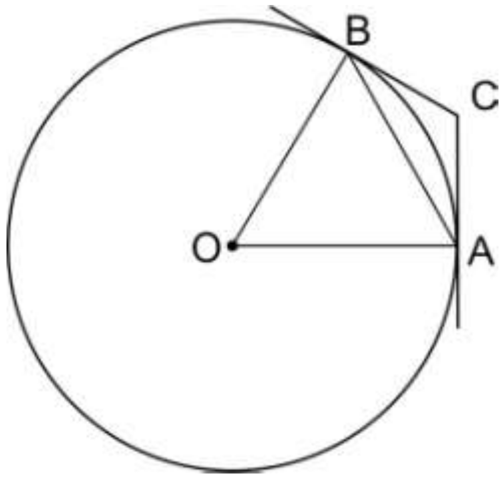


Касательная BC перпендикулярна радиусу OB, проведенному в точку касания. Значит, угол OBC равен $90°$, и тогда угол OBA равен $90° - 32° = 58°$. Угол OAB также равен $58°$, так как треугольник OAB — равнобедренный, его стороны OA и OB равны радиусу окружности. Тогда третий угол этого треугольника, то есть угол AOB, равен $180° - 58° \cdot 2 = 64°$.

Центральный угол равен угловой величине дуги, на которую он опирается. Значит, дуга AB равна $64°$.

Ответ: 64.

21. Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB, равный $122°$. *Найдите величину меньшей дуги AB, стягиваемой точками касания. Ответ дайте в градусах.*

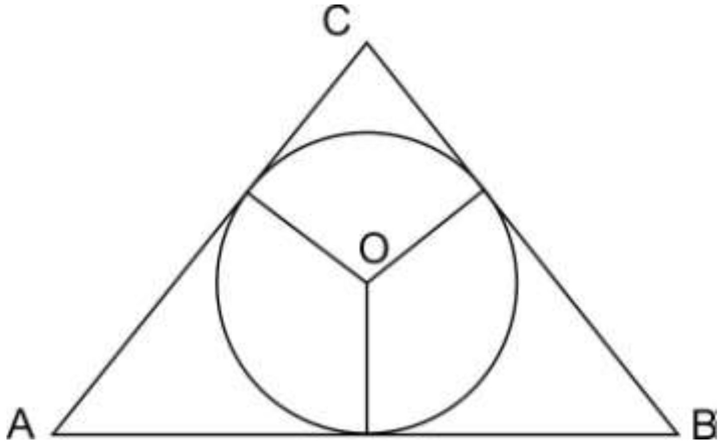


Рассмотрим четырехугольник OBCA. Углы A и B в нем — прямые, потому что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Сумма углов любого четырехугольника равна $360°$, и тогда угол AOB равен $180° - 122° = 58°$.

Поскольку угол AOB — центральный угол, опирающийся на дугу AB, угловая величина дуги AB также равна $58°$.

Вписанные и описанные треугольники

22. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



Запишем площадь треугольника ABC двумя способами:

$S = pr = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

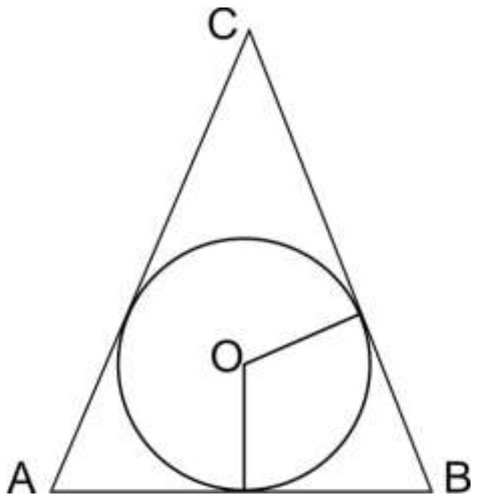
По формуле Герона, площадь треугольника $S_{ABC} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$

Тогда

$r = \frac{2 \cdot 12}{16} = \frac{3}{2} = 1,5.$

Ответ: 1,5.

23. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

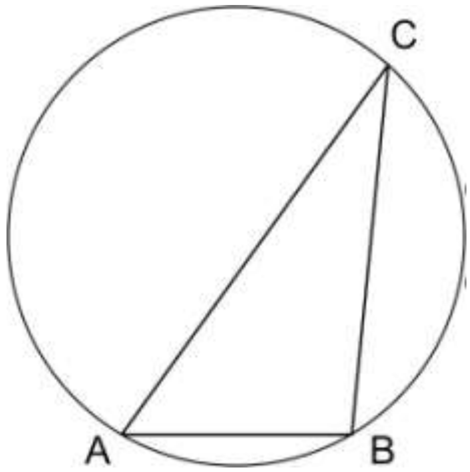


Сложив 3 и 5, мы получим, что длина боковой стороны равна 8. Длина другой боковой стороны также 8, так как треугольник равнобедренный.

Длины отрезков касательных, проведенных из одной точки, равны. Значит, длины отрезков касательных, проведенных из точки B, равны 3. Тогда длина стороны AC равна $3 + 3 = 6$.

Ответ: 6.

24. Меньшая сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



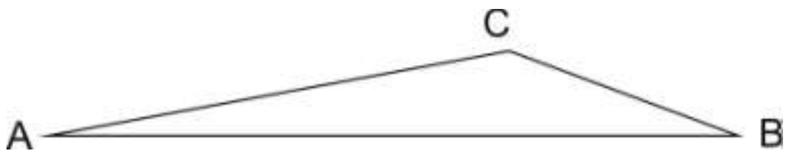
Можно соединить точки A и B с центром окружности, найти центральный угол AOB и вписанный угол ACB. Есть и другой способ.

По теореме синусов, $\frac{AB}{\sin C} = 2R.$ Тогда $\sin C = \frac{1}{2}.$

Угол C может быть равен 30° или 150° - ведь синусы этих углов равны $\frac{1}{2}.$ Однако по рисунку угол C — острый, значит, он равен 30°.

Ответ: 30.

25. Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

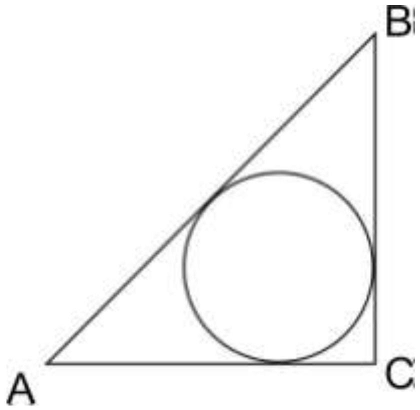


По теореме синусов, $\frac{AB}{\sin C} = 2R.$ Тогда $\sin C = \frac{1}{2}.$

По условию, угол C — тупой. Значит, он равен 150°.

Ответ: 150.

26. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $82 + 41\sqrt{2}$. *Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.*

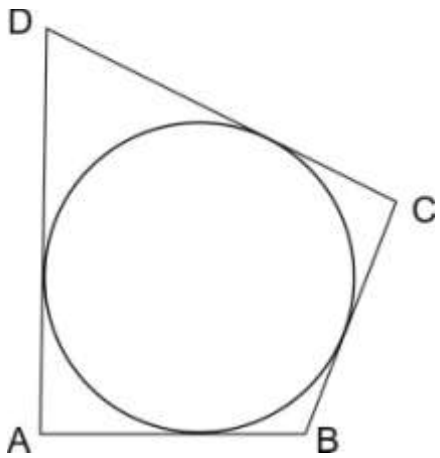


Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \frac{a+b-c}{2}$. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника в $\sqrt{2}$ раз больше катета. Получим:

Ответ: 41.

Вписанные и описанные четырехугольники

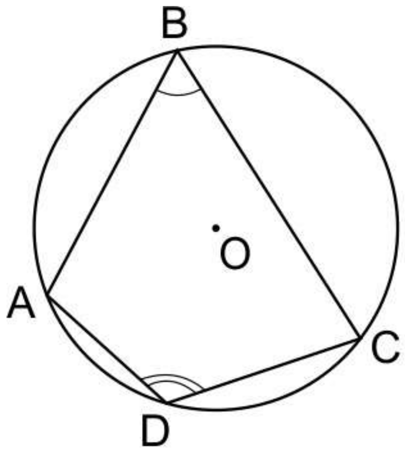
27. В четырёхугольник ABCD вписана окружность, $AB = 10, CD = 16.$ *Найдите периметр четырёхугольника ABCD.*



В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны. Значит,

$AD + BC = AB + DC = 10 + 16 = 26.$
Тогда периметр четырехугольника равен $AD + BC + AB + DC = 26 \cdot 2 = 52.$

28. Стороны четырехугольника ABCD AB,BC,CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95,49,71,145 градусов.Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

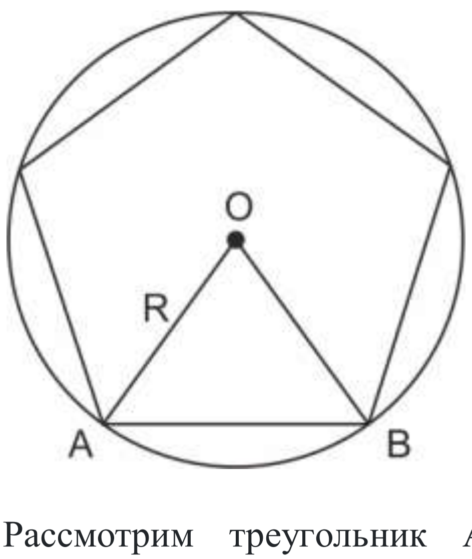


Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Значит, угол B равен $\frac{1}{2} \cdot (145^\circ + 71^\circ) = 108^\circ$.

Ответ: 108.

С четырехугольником справились. А с n-угольником?

Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведенным в одну из вершин стороны, равен 84° Найдите n.



Рассмотрим треугольник AOB. Он равнобедренный, т.к. AO=OB=R. Значит, $\angle ABO = \angle BAO = 84^\circ$.

Ответ: 30.

Использованные источники:

- ЕГЭ. Математики. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И.В.Ященко.- М.: Издательство «Национальное образование», 2021.- 256с
- https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/zadanie-6-profilnogo-ege-po-matematike-planimetriya/
- http://www2.bigpi.biysk.ru/vkr/file/fii_21_06_2018_01_04_24.pdf