*Памятка*

# Решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов.

Для того, чтобы использовать метод интервалов при решения неравенств, необходимо:

1. Разложить $f(x)$ на множители.
2. Уточнить кратность корней: если есть корни чётной кратности, то, проходя через них, функция дважды меняет свой знак на противоположный; если есть корни нечётной кратности, то, проходя через них, функция меняет свой знак на противоположный.
3. Обратить внимание на то, какое дано неравенство, строгое или нет, так как в зависимости от этого на оси абсцисс нужно отметить или незаштрихованные (полые) точки, или заштрихованные точки.
4. Для дробных неравенств отметить на оси абсцисс корни знаменателя как полые точки.

## *Тренировочная работа 1*

Решите неравенства 1–10:

**1.** $\dfrac{x+4}{(x+5)x} < 0.$

**2.** $\dfrac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0.$

**3.** $\dfrac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0.$

**4.** $\dfrac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leqslant 0.$

**5.** $\dfrac{4x+3}{x+2} > 5.$

**6.** $\dfrac{6x-1}{4x+3} \leqslant \dfrac{3x-2}{2x-1}.$

**7.** $\dfrac{5}{-6x+3} + \dfrac{6x}{1-2x} \geqslant 0.$

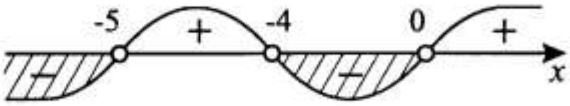
**8.** $\dfrac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \dfrac{3x+7}{3x-6} \leqslant 0.$

**9.** $\dfrac{6}{-4x-x^2} - \dfrac{2}{x^2-4x} + \dfrac{x}{x^2-16} \geqslant 0.$

**10.** $\left(\dfrac{x^2+2x+4}{4x^2-1} \cdot \dfrac{2x^2-x}{-x^3+8} - \dfrac{2-x}{2x^2+x}\right) : \dfrac{4}{x^2-2x} \geqslant \dfrac{4-x}{x+2x^2}.$

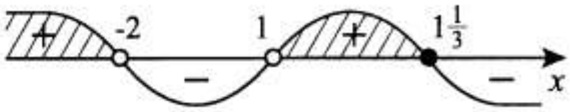
## *Решение тренировочной работы 1*

**1.** $\dfrac{x+4}{(x+5)x} < 0.$



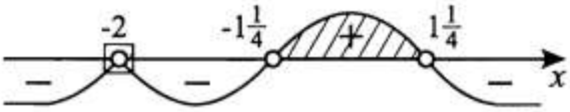

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-4;0)$.

**2.** $\dfrac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0.$



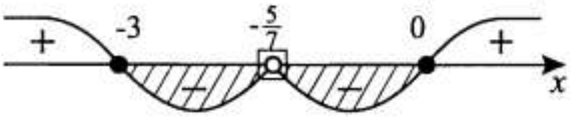

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(1;1\dfrac{1}{3}\right]$.

**3.** $\dfrac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0.\quad \dfrac{(5+4x)(5-4x)}{(x+2)^2} > 0.$




Ответ: $\left(-1\dfrac{1}{4};1\dfrac{1}{4}\right)$.

**4.** $\dfrac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leqslant 0.\quad \dfrac{x(x+3)}{(7x+5)^2} \leqslant 0.$




Ответ: $\left[-3;-\dfrac{5}{7}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{7};0\right]$.

**5.** $\dfrac{4x+3}{x+2} > 5.\quad \dfrac{4x+3-5(x+2)}{x+2} > 0;\quad \dfrac{-x-7}{x+2} > 0.$

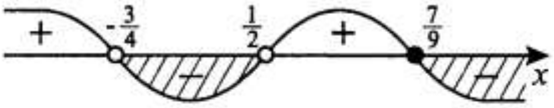

Ответ: $(-7;-2)$.

**6.** $\dfrac{6x-1}{4x+3} \leqslant \dfrac{3x-2}{2x-1}.\quad \dfrac{6x-1}{4x+3}-\dfrac{3x-2}{2x-1} \leqslant 0;$

$$\frac{(6x-1)(2x-1)-(3x-2)(4x+3)}{(4x+3)(2x-1)} \leqslant 0;$$

$$\frac{12x^2-8x+1-12x^2-x+6}{(4x+3)(2x-1)} \leqslant 0;$$

$$\frac{7-9x}{(4x+3)(2x-1)} \leqslant 0.$$




Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{9}; +\infty\right)$.

**7.** $\dfrac{5}{-6x+3} + \dfrac{6x}{1-2x} \geqslant 0.$

$$\frac{5}{3(1-2x)} + \frac{6x}{1-2x} \geqslant 0; \quad \frac{5+18x}{3(1-2x)} \geqslant 0$$


Ответ: $\left[-\frac{5}{18}; \frac{1}{2}\right)$.

**8.** $\dfrac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \dfrac{3x+7}{3x-6} \leqslant 0.$

$$\frac{x^2+7x+8}{(x+1+3)(x+1-3)} - \frac{3x+7}{3(x-2)} \leqslant 0;$$

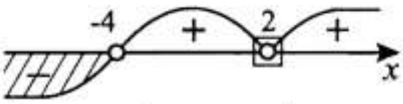
$$\frac{x^2+7x+8}{(x+4)(x-2)} - \frac{3x+7}{3(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{3(x^2+7x+8)-(3x+7)(x+4)}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{3x^2+21x+24-3x^2-19x-28}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{2x-4}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0; \ \frac{2(x-2)}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0.$$

Корень $x = 2$ двойной кратности.



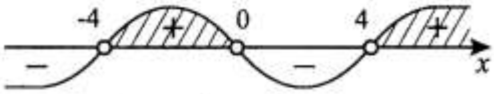

Ответ: $(-\infty; -4)$.

**9.** $\dfrac{6}{-4x-x^2}-\dfrac{2}{x^2-4x}+\dfrac{x}{x^2-16}\geqslant 0.$

$\dfrac{6}{-x(x+4)}-\dfrac{2}{x(x-4)}+\dfrac{x}{(x+4)(x-4)}\geqslant 0;$

$\dfrac{-6(x-4)-2(x+4)+x^2}{x(x-4)(x+4)}\geqslant 0;$

$\dfrac{x^2-8x+16}{x(x-4)(x+4)}\geqslant 0;\quad \dfrac{(x-4)^2}{x(x-4)(x+4)}\geqslant 0$




Ответ: $(-4;0)\cup(4;+\infty)$.

**10.** $\left(\dfrac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2-x}{-x^3+8}-\dfrac{2-x}{2x^2+x}\right):\dfrac{4}{x^2-2x}\geqslant\dfrac{4-x}{x+2x^2}.$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4);\quad x\neq 2,\ x\neq\pm\dfrac{1}{2},\ x\neq 0.$

$\left(\frac{(x^2+2x+4)\cdot x\cdot(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)(2-x)(x^2+2x+4)}-\frac{2-x}{x(2x+1)}\right)\cdot\frac{x(x-2)}{4}-\frac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\left(\dfrac{x}{(2x+1)(2-x)}-\dfrac{2-x}{x(2x+1)}\right)\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0$

(так как $x^2+2x+4>0$ при всех $x$).

$\dfrac{x^2-(2-x)^2}{(2x+1)(2-x)x}\cdot\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{(x+2-x)(x-2+x)x(x-2)}{(2x+1)(2-x)x\cdot 4}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{2\cdot 2(x-1)\cdot(-1)}{4(2x+1)}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

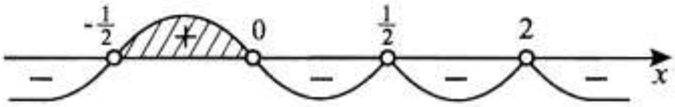
$\dfrac{1-x}{2x+1}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{x-x^2-4+x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{-(x^2-2x+4)}{x(1+2x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{-1}{x(1+2x)}\geqslant 0$

(так как $x^2-2x+4>0$ при всех $x$).

$-\dfrac{1}{x(1+2x)}\geqslant 0$ при всех $x\neq 2;\ x\neq\pm\dfrac{1}{2};\ x\neq 0.$




Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

*Тренировочная работа 2*

**1.** $(x-2)^2(x+3)^3x < 0.$

**2.** $(x^2-x-2)(x-2)(x-1) \leqslant 0.$

**3.** $(1-x^3)^2(x^2-5x) \leqslant 0.$

**4.** $(1-2x)(x+2) > 0.$

**5.** $1-2x \leqslant \dfrac{3}{x}.$

**6.** $\dfrac{7-x}{x} < 3.$

**7.** $\dfrac{x+3}{x-2} \geqslant \dfrac{x-3}{x+4}.$

**8.** $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8 > 0.$

**9.** $\dfrac{x^2+x-20}{(x-3)x} > 0.$

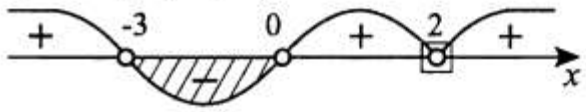
**10.** $\dfrac{x^4+5x^2-6}{(4-x)^3} < 0.$

**11.** $\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2 > 1.$

**12.** $\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2 \geqslant \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-6}.$

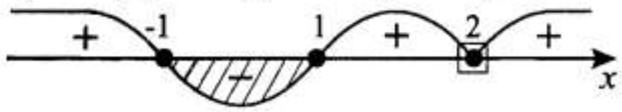
## *Решение тренировочной работы 2*

**1.** $(x-2)^2(x+3)^3x<0$.



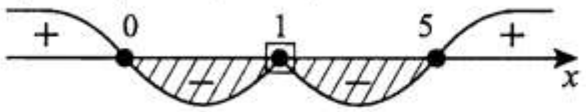

Ответ: $(-3;0)$.

**2.** $(x^2-x-2)(x-2)(x-1)\leqslant 0$.
Так как $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$,
$(x-2)(x+1)(x-2)(x-1)\leqslant 0$.




Ответ: $[-1;1]\cup\{2\}$.

**3.** $(1-x^3)^2(x^2-5x)\leqslant 0$.
$(1-x)^2(1+x+x^2)^2\cdot x(x-5)\leqslant 0$;
$x^2+x+1>0$ (при всех $x$), так как $\begin{cases} a=1>0, \\ D=-3<0; \end{cases}$
$(1-x)^2=(x-1)^2$ — вид канонический.
$(1-x)^2\cdot x(x-5)\leqslant 0$.



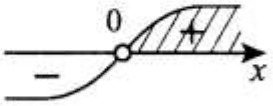

Ответ: $[0;5]$.

**4.** $(1-2x)(x+2)>0$.


Ответ: $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

**5.** $1-2x\leqslant\dfrac{3}{x}$. $\dfrac{2x^2-x+3}{x}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}\geqslant 0$,

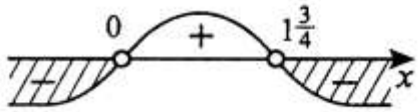
так как $2x^2-x+3>0$ (при всех $x$) и $\begin{cases} a=2>0, \\ D=-23. \end{cases}$




Ответ: $(0;+\infty)$.

**6.** $\dfrac{7-x}{x} < 3.$

$\dfrac{7-x-3x}{x} < 0; \quad \dfrac{7-4x}{x} < 0.$

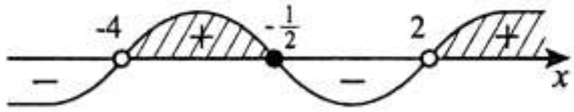



Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(1\dfrac{3}{4}; +\infty\right).$

**7.** $\dfrac{x+3}{x-2} \geqslant \dfrac{x-3}{x+4}.$

$\dfrac{(x+3)(x+4)-(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0;$

$\dfrac{x^2+7x+12-x^2+5x-6}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0; \quad \dfrac{12x+6}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0.$




Ответ: $\left(-4; -\dfrac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty).$

**8.** $(x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8 > 0.$

Пусть $x^2 - 3x = t.$

$t^2 - 2t - 8 = (t+2)(t-4) = (x^2-3x+2)(x^2-3x-4) =$

$= (x-1)(x-2)(x-4)(x+1).$

Итак, $(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) > 0.$


Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty).$

**9.** $\dfrac{x^2+x-20}{(x-3)x} > 0.$

$\dfrac{(x+5)(x-4)}{(x-3)x} > 0.$


Ответ: $(-\infty; -5) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty).$

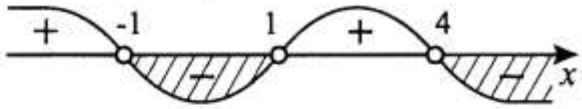
**10.** $\dfrac{x^4+5x^2-6}{(4-x)^3}<0.$

$x^4+5x^2-6=(x^2+6)(x^2-1)$, так как $x^2=t$;

$x^4+5x^2-6=t^2+5t-6=(t+6)(t-1)=(x^2+6)(x^2-1)$;

$x^2+6>0$ (при всех $x$);

$\dfrac{(x^2+6)(x^2-1)}{-(x-4)^3}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-4)^3}<0.$




Ответ: $(-1;1)\cup(4;+\infty)$.

**11.** $\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2>1.$

$\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2-1>0$; $\left(\dfrac{3-x}{2+x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{3-x}{2+x}-1\right)>0$;

$\dfrac{3-x+2+x}{2+x}\cdot\dfrac{3-x-2-x}{2+x}>0$; $\dfrac{5(1-2x)}{(2+x)^2}>0.$

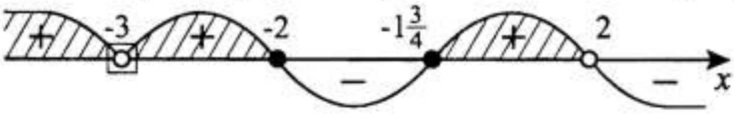

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

**12.** $\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2\geqslant\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-6}.$

$\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2-\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-2)}\geqslant 0$; $\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\left[\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x-2}\right]\geqslant 0$;

$\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{(x+2)(x-2)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}\geqslant 0$;

$\dfrac{(x+2)(x^2-4-x^2-4x-3)}{(x+3)^2(x-2)}\geqslant 0$; $\dfrac{-(x+2)(4x+7)}{(x+3)^2(x-2)}\geqslant 0.$




Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup\left[-1\dfrac{3}{4};2\right)$.