# Методика подготовки к решению заданий 15 ЕГЭ

# Критерии проверки и оценка решений задания 15

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

## *Типы неравенств:*

- *Рациональное*
- *Показательное*
- *Логарифмическое*
- *Степенное*

## *Методы решения:*

- *Метод интервалов*
- *Метод замены переменной*
- *Метод рационализации и др.*

# Начальный этап подготовки. Закрепление навыков решения дробно-рациональных неравенств.

Для решения неравенств методом интервалов нужно разложить числитель и знаменатель на линейные и квадратичные (не имеющие корней) множители.

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots}<0, \qquad \text{где } k_i,\ m_i \in N$$

**Распространенной ошибкой** при решении неравенств является отбрасывание неотрицательных множителей вида $(x-a_i)^{k_i}$ и $(x-b_j)^{m_j}$, где $k_i$ и $m_j$ - четные числа.

Это может привести как к потере решений, так и к включению в решение посторонних значений.

## Решить неравенство: $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \frac{3x+7}{3x-6} \leq 0$

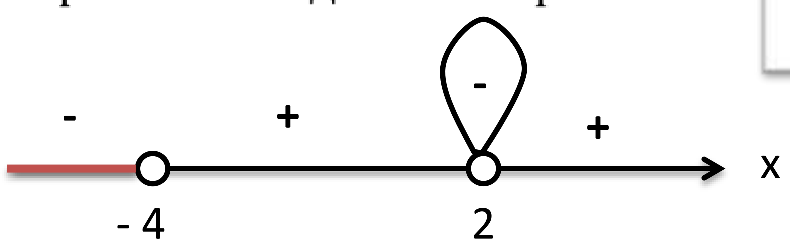
$$\frac{x^2+7x+8}{(x+1-3)(x+1+3)} - \frac{3x+7}{3(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+7x+8}{(x-2)(x+4)} - \frac{3x+7}{3(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{3(x^2+7x+8)-(3x+7)(x+4)}{3(x-2)(x+4)} \leq 0$$

$$\frac{2x-4}{3(x-2)(x+4)} \leq 0$$

Корень $x = 2$ двойной кратности




$x \in (-\infty;\ -4)$

*Памятка*

**Решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов.**

Для того, чтобы использовать метод интервалов при решения неравенств, необходимо:

1. Разложить f(x) на множители.
2. Уточнить кратность корней: если есть корни чётной кратности, то, проходя через них, функция дважды меняет свой знак на противоположный; если есть корни нечётной кратности, то, проходя через них, функция меняет свой знак на противоположный.
3. Обратить внимание на то, какое дано неравенство, строгое или нет, так как в зависимости от этого на оси абсцисс нужно отметить или незаштрихованные (полые) точки, или заштрихованные точки.
4. Для дробных неравенств отметить на оси абсцисс корни знаменателя как полые точки.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -4)$

# Решение показательных неравенств.

***Показательным неравенством*** называется неравенство, в котором переменная содержится в показателе степени.

Решение простейших показательных неравенств основано на ***свойстве монотонности*** показательной функции.

Памятка

**Решение показательных неравенств.**

*Неравенство вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, где $a>0$ и $a\neq 1$, называется показательным*

*Решение основано на следующем свойстве показательной функции:*

- *функция $y=a^x$ возрастает, если $a>1$*
- *функция $y=a^x$ убывает, если $0<a<1$*

*Таким образом:*

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

| | |
|---|---|
| $f(x)<g(x)$ при $a>1$ | $f(x)>g(x)$ при $0<a<1$ |

Решить неравенство: $$\frac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-9}-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1}-3^{x-1}>0$$

Решение:

$$\frac{4}{3\cdot\frac{1}{3^x}-9}-\frac{1}{\frac{1}{3^x}-1}-\frac{1}{3}\cdot 3^x>0$$

(***Метод замены переменной***)

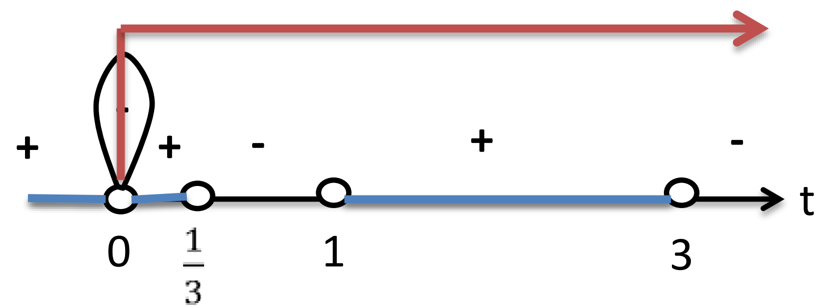
Пусть $3^x=t$, где $t>0$.

$$\frac{4}{\frac{3}{t}-9}-\frac{1}{\frac{1}{t}-1}-\frac{t}{3}>0$$

$$\frac{4t}{3-9t}-\frac{t}{1-t}-\frac{t}{3}>0$$

$$\frac{9t^2-3t^3}{3(1-3t)(1-t)}>0$$

$$\frac{t^2(3-t)}{(1-3t)(1-t)}>0$$




$$0<t<\frac{1}{3}$$
$$3^x<\frac{1}{3}$$
$$x<-1$$

$$1<t<3$$
$$1<3^x<3$$
$$0<x<1$$

Ответ: $x \in (-\infty;-1)\cup(0;1)$

# *Решение показательных неравенств.*

***Метод почленного деления*** *заключается в том, чтобы разделить каждый член неравенства, содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней.*

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^{x} \cdot b^{x} + \gamma \cdot b^{2x} = 0$$

## Решить неравенство: $\frac{3^{x+1}}{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x} - \frac{3^x}{2^x - 3^x} \geq 0$

Решение:

(***Метод почленного деления***)

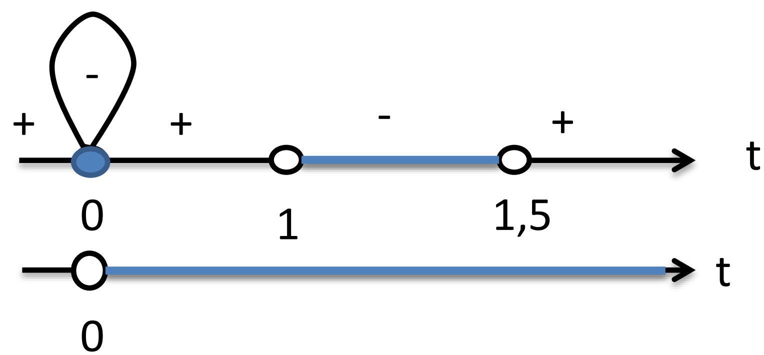
$$\frac{3\cdot 3^x}{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x} - \frac{3^x}{2^x - 3^x} \geq 0 \;|:\; 2^x \neq 0$$

$$\frac{3\cdot(\frac{3}{2})^x}{3-2\cdot(\frac{3}{2})^x} - \frac{(\frac{3}{2})^x}{1-(\frac{3}{2})^x} \geq 0$$

Пусть $(\frac{3}{2})^x = t,$ где $t > 0$.

$$\frac{3t}{3-2t} - \frac{t}{1-t} \geq 0$$

$$\frac{t^2}{(1-t)(3-2t)} \leq 0$$




$$1 < t < 1{,}5$$

$$1 < (\frac{3}{2})^x < 1{,}5$$

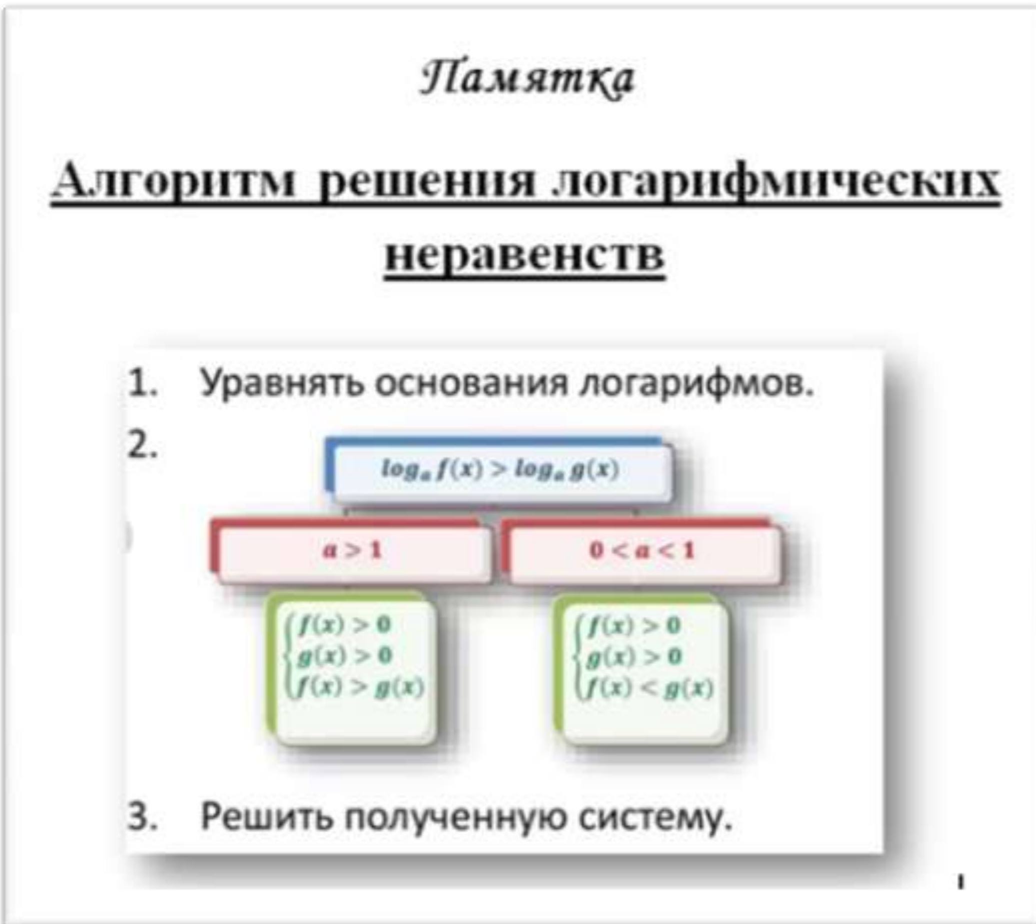
$$0 < x < 1$$

Ответ: $x \in (0;$

# *Решение логарифмических неравенств.*

Основано на свойстве монотонности логарифмической функции на промежутке $(0; +\infty)$.

**Рекомендуется** использовать равносильные преобразования, при которых не происходит потери решений или приобретения посторонних.


*Памятка*

**Алгоритм решения логарифмических неравенств**

1. Уравнять основания логарифмов.
2. $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

$a > 1$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

$0 < a < 1$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

3. Решить полученную систему.

$$\log_a b^n = n\log_a|b|,\ \text{n} - \text{чёт.}$$

$$\log_a(bc) = \log_a|b| + \log_a|c|$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a|b| - \log_a|c|$$

# *Метод рационализации*

Суть метода **заключается в замене** сложного выражения F(x) на более простое выражение G (x) (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство G (x) $\vee$ 0 равносильно неравенству F (x) $\vee$ 0 в области определения выражения F(x).

$\vee$ - один из знаков $>, <, \leq, \geq$

Алгоритм: 1. Выписать условия, задающие ОДЗ.

2. Перенести в исходном неравенстве все слагаемые в левую часть, т.е. справа должен стоять 0, а все возможные слагаемые в левой части привести к общему знаменателю.
3. Произвести замену.
4. Решить полученное неравенство.
5. Записать ответ исходного неравенства, учитывая ОДЗ.

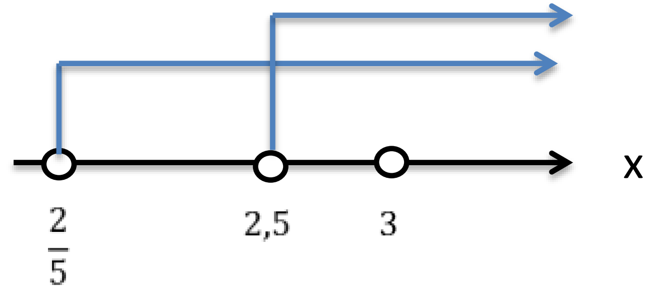
| Выражение (множитель) в неравенстве *(правая часть неравенства равна нулю!)* | На что меняем |
|---|---|
| $\log_a f - \log_a g$ <br> *(помните, что f >0, g >0,a >0, a≠1)* | $(a-1)\cdot(f-g)$ |
| $\log_a f - 1$ <br> *(помните, что f >0, ,a >0, a≠1)* | $(a-1)\cdot(f-a)$ |
| $\log_a f$ <br> *(помните, что f >0, a >0 ,a≠1)* | $(a-1)\cdot(f-1)$ |

**Примечание:** ***a* – функция от x или число, *f* и *g* – функции от x.**

# Решить неравенство: $\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1$

Решение:

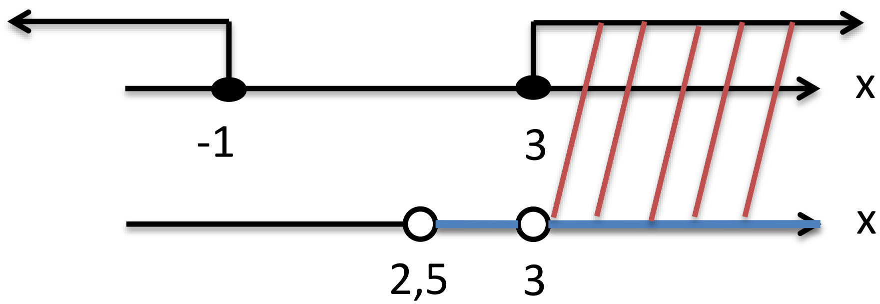
$$\begin{cases} 5x-2>0 \\ 2x-5>0 \\ 2x-5 \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>\frac{2}{5} \\ x>2{,}5 \\ x \neq 3 \end{cases}$$




$x \in (2{,}5; 3) \cup (3; +\infty)$

$$(2x-5-1)(5x-2-2x+5) \geq 0$$

$$(2x-6)(3x+3) \geq 0$$




$x \in (3; +\infty)$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$